स्पर्धा परीक्षा

अंकगणित

भाग- १

UPSC, MPSC,
PSI/STI/ASO,
Combine Pre+Mains
ESI/ Tax Asst./ Clerk

तलाठी, पोलीस भरती, ग्रामसेवक, कृषी सहाय्यक, सर्व स्पर्धा परीक्षेसाठी उपयुक्त

Prof. Dhondiram Panchappa Bhingole
Founder
Rajmudra Academy, Latur

9923684001

स्वामी रामानंद तीर्थ मराठवाडा विद्यापीठ,

नांदेड

Syllabus of

B.A. In Administrative Service

Faculty of Humanities

(First Year)

Semester Pattern

(Choice Based Credit System)

With Effect From June 2019

Swami Ramanand Teerth Marathwada University, Nanded

B.A.In Administrative Service (CBCS Pattern)

First Year

Math

Semester -I

Mathametics -Part I

(Paper No: A.S.3)

Credit : 03 | **Periods : 50** | **marks : 75**

अभ्यासक्रम घटक :

		Page No.
०१.	संख्या आणि संख्याचे प्रकार	5
०२.	संख्या - विभाज्यतेच्या कसोटया, श्रेणी, स्थानिक किंमत	17
०३.	पदावल्या - गणिती प्रक्रिया व सुत्रे	22
०४.	मसावी - लसावि	27
०५.	अपूर्णांक - व्यवहारी अपूर्णांक	35
०६.	अपूर्णांक - दशांश अपूर्णांक	50
०७.	सरासरी	54
०८.	वर्ग - वर्गमूळ व घन - घनमूळ	60
०९.	घातांक	69
१०.	भूमिती- मूलभूत संबोध (कोन, त्रिकोन, चौकोन, वर्तूळ)	79

अनुक्रमणिका

अ.क्र.	घटक	पान क्र.
०१.	संख्या आणि संख्याचे प्रकार (Numbers & Types of Numbers)	
०२.	संख्या – विभाज्यतेच्या कसोटया, श्रेणी, स्थानिक किंमत (Numbers -Test For Divisibility)	
०३.	पदावल्या – गणिती प्रक्रिया व सुत्रे (Simplification)	
०४.	मसावी – लसावि (HCF & LCM)	
०५.	अपूर्णांक – व्यवहारी अपूर्णांक (Fractions)	
०६.	अपूर्णांक – दशांश अपूर्णांक (Decimal Fractions)	
०७.	सरासरी (Average)	
०८.	वर्ग – वर्गमूळ व घन – घनमूळ (Square - Square Roots & Cube - Cube Roots)	
०९.	घातांक व करणी (Indices and Surd)	
१०.	भूमिती– मूलभूत संबोध (कोन, त्रिकोन, चौकोन, वर्तूळ)	

1 संख्या व संख्यांचे प्रकार

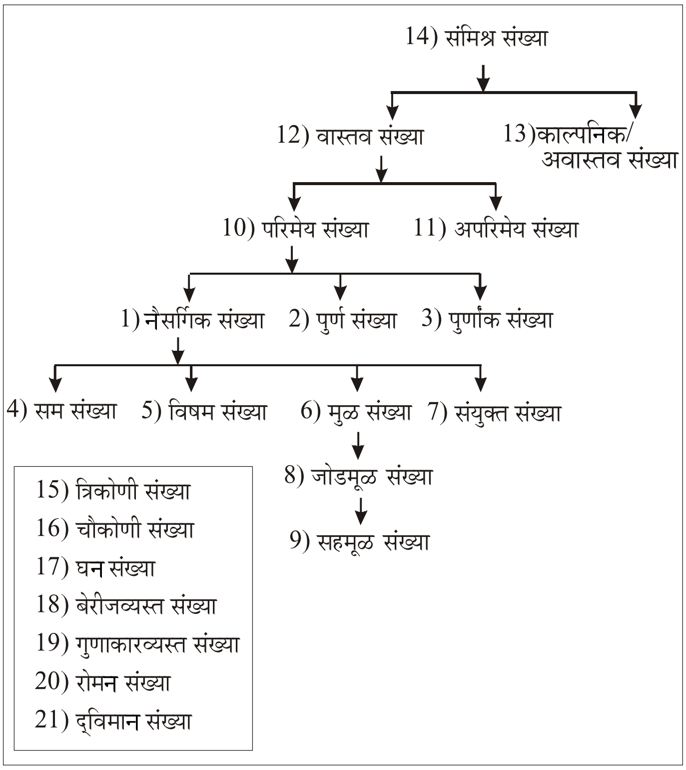
- **संख्या (Number):**
  "वस्तू मोजण्यासाठी वापरले जाणारे गणितीय एकक म्हणजे संख्या होय."

➢ प्राचीन काळातील भारतीयांनी गणितासाठी वापरलेल्या चिन्हांना अंक म्हणतात.

➢ आर्यभट्टांनी इ.स. 500 च्या सुमारास 'ख' (शुन्य) चा शोध लावला.

➢ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 या दहा अंकाचा वापर करून 'आसा' या वैदिक काळातील गणिततज्ज्ञाने सर्वप्रथम मांडलेली 'दशमान संख्यालेखन पद्धती' सर्व जगाला एक देणगी मिळाली.

➢ संख्याचे महत्वाचे प्रकार लक्षात राहण्यासाठी खालील तक्ता पहा.



1) नैसर्गिक संख्या (Natural numbers)

वस्तू मोजण्यासाठी आपण ज्या संख्यांचा वापर करतो त्या संख्यांना मोजसंख्या (Counting Numbers) किंवा नैसर्गिक संख्या म्हणतात.

➢ नैसर्गिक संख्या N = (1, 2, 3, 4, 5, 6, ...)

➢ 1 ही सर्वात लहान नैसर्गिक संख्या आहे.

➢ 0 ही संख्या नैसर्गिक संख्या नाही.

महत्वाची सूत्रे

1) क्रमवार (1 पासून) नैसर्गिक संख्यांची बेरीज = $\frac{n(n+1)}{2}$

2) क्रमवार नैसर्गिक/सम/विषम / पटीतील संख्यांची

बेरीज = $\frac{\text{पहिली संख्या + शेवटची संख्या}}{2}$ x एकूण संख्या

3) क्रमवार नैसर्गिक संख्यांच्या वर्गांची बेरीज = $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4) क्रमवार नैसर्गिक संख्यांच्या घनांची बेरीज = $\left[\frac{2(n+1)}{2}\right]^2$

5) एकूण हस्तांदोलनाची संख्या = $\frac{n(n-1)}{2}$

Note - प्रत्येक सुत्रात n = शेवटची संख्या

Type - 1

1) 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 50 = किती ?

→ **Method - I**

सुत्र $= \frac{n(n+1)}{2}$

$= \frac{50\times 51}{2}$

$= 25\times 51$

$= 1275$

Method - II

सुत्र = $\frac{\text{प. संख्या + शे. संख्या}}{2}$ x एकूण संख्या

$= \left(\frac{1+50}{2}\right)\times 50$

$= \frac{51}{2}\times 50$

$= 51\times 25$

$= 1275$

Type-2

2) 21 + 22 + 23 + ... + 50 = किती ?

Method - I

→ (1 ते 50 संख्यांची बेरीज) - (1 ते 20 संख्यांची बेरीज)

$= \left(\frac{50\times 51}{2}\right) - \left(\frac{20\times 21}{2}\right)$

$= 25\times 51 - 10\times 21$

$= 1275 - 210$

$= 1065$

Method - II

$= \dfrac{(\text{प. संख्या} + \text{शे.संख्या})}{2} \times \text{ए. संख्या}$

$= \left(\dfrac{21+50}{2}\right) \times 30$

$= 71 \times 15$

$= 1065$

Note - एकूण संख्या मोजून लिहाव्यात.

Type-3

3) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 30^2$ = किती ?

→ 1 ते 30 वर्ग संख्यांची बेरीज

$= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= \dfrac{30 \times 31 \times 61}{6}$

$= 5 \times 31 \times 61$

$= 155 \times 61$

$= 9455$

Type-4

4) $11^2 + 12^2 + 13^2 + ... + 30^2$ = किती ?

→ 1 ते 30 वर्ग संख्यांची बेरीज

= (1 ते 30 वर्ग संख्यांची बेरीज) - (1 ते 14 वर्ग संख्यांची बेरीज)

सुत्र $= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= \left(\dfrac{30 \times 31 \times 61}{6}\right) - \left(\dfrac{10 \times 11 \times 21}{6}\right)$

$= (5 \times 31 \times 61) - (5 \times 11 \times 21)$

$= 9455 - 1155$

$= 8300$

Type-5

6) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$ .... $+ 20^3$ = किती ?

→ $= \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \left[\dfrac{20 \times 21}{2}\right]^2$

$= (10 \times 21)^2$

$= (210)^2 = 44100$

Type-6

7) एका संघात 9 खेळाडू आहेत. जर प्रत्येकाने एकमेकांशी हस्तांदोलने केली तर ती संख्या किती ?

(MPSC लिपीक - 2011)

$= \dfrac{n(n-1)}{2}$

एकूण हस्तांदोलने $= \dfrac{9 \times 8}{2}$

$= 9 \times 4$

$= 36$

स्वाध्याय - 1.1

1) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 +$ .... $+ 60 =$ किती ?
   a) 1770 b) 1830 c) 915 d) 875
2) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 +$ .... $+ 35 =$ किती ?
   a) 595 b) 1260 c) 1024 d) 630
3) $31 + 32 + 33 + 34 +$ .... $+ 50 =$ किती ?
   a) 930 b) 1275 c) 810 d) 1620
4) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 +$ .... $+ 25^2 =$ किती ?
   a) 5525 b) 33150 c) 7850 d) 11050
5) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 +$ .... $+ 25^3 =$ किती ?
   a) 5756 b) 8953 c) 4556 d) 3025
6) $11^3 + 12^3 + 13^3 +$ .... $+ 30^3 =$ किती ?
   a) 216225 b) 3025 c) 13556 d) 213200
7) एका सभाग्रहात 20 लोक होते. जर प्रत्येकाने एकमेकांशी एकदा हस्तांदोलन केले तर एकूण हस्तांदोलने किती ?
   a) 210 b) 190 c) 200 d) 180
8) $11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2 +$ .... $+ 20^2 =$ किती ?
   a) 7455 b) 8925 c) 8610 d) 4305

उत्तरे (स्वाध्याय - 1.1)

1	2	**3**	3	**5**	3	**7**	2
2	4	**4**	1	**6**	4	**8**	1

2) पुर्ण संख्या (Whole number)

➢ सर्व नैसर्गिक संख्या आणि शुन्य (0) मिळून होणाऱ्या संख्या समुहाला पुर्ण संख्या म्हणतात.

पुर्ण संख्या (w) = (0, 1, 2, 3, 4, 5, ...)

$\therefore N \subseteq W$ नैसर्गिक संख्या उपसंच पुर्ण संख्या

3) पुर्णांक संख्या

➢ सर्व नैसर्गिक संख्या, शुन्य आणि नैसर्गिक संख्यांच्या विरूद्ध संख्या यांना मिळून होणाऱ्या संख्यांना पुर्णांक संख्या म्हणतात.

पुर्णांक संख्या = I = (...., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...)

$\therefore N \subseteq W \subseteq I$

➢ सर्वात लहान पुर्णांक संख्या व सर्वात मोठी पुर्णांक संख्या सांगता येत नाही.

➢ 0 हा पुर्णांक संख्यांचा मध्यबिंदू आहे, म्हणून संख्यारेषेवर त्याला '**आरंभबिंदू**' म्हणतात.

संख्यारेषा -

U T S R Q P O A B C D E F

-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6

- 0 हा संख्यारेषेचा आरंभबिंदू आहे.
- धन पुर्णांक संख्या (Positive Integers) = +1, +2, +3, +4, ...
- ऋण पुर्णांक संख्या (Negative Integers) = -1, -2, -3, -4, ...
- 0 हा धनही नाही आणि ऋणही नाही.

Note - संख्यारेषेवर दिलेल्या दोन संख्यापैकी जी संख्या उजवीकडे असते ती संख्या डावीकडील संख्येपेक्षा मोठी असते.

$\therefore$ i) सर्व धन पुर्णांक 0 व ऋणसंख्यापेक्षा मोठी आहे

ii) -1 हा सर्वात मोठा ऋण पुर्णांक आहे.

4) सम संख्या (Even Numbers)

- ज्या संख्यांना 2 ने नि:शेष भाग जातो त्यांना सम संख्या म्हणतात.
- सम संख्यांच्या एककस्थानी 0, 2, 4, 6, 8 यापैकी एखादी संख्या येते.

उदा. 432, 420, 338, 946

$$\text{क्रमवार सम संख्यांची बेरीज} = \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

Note - येथे n = शेवटची सम संख्या

- क्रमवार सम संख्यांत 2 चा फरक असतो, म्हणून -
- x ही सम संख्या असेल तर x-4, x-2, x, x+2, x+4 या सुद्धा क्रमवार सम संख्या असतात.

5) विषम संख्या

"ज्या संख्यांना 2 ने भाग दिला असता बाकी 1 उरते त्या संख्यांना विषम संख्या असे म्हणतात."

☞ ज्या संख्यांच्या एकक स्थानी 1, 3, 5, 7, 9 हे अंक येतात त्या संख्यांना विषम संख्या असतात.

उदा. 341, 555, 9727, 5839

$$\text{क्रमवार विषम संख्यांची बेरीज} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

Note - n = शेवटची विषम संख्या

सम व विषम संख्यांचे गुणधर्म -

☞ दोन क्रमवार सम किंवा विषम संख्या 2 च्या फरकाने येतात.

☞ दोन सम किंवा विषम संख्यांची बेरीज व वजाबाकी नेहमी सम संख्या येते.

सम + सम = सम   विषम + विषम = सम

सम - सम = सम   विषम - विषम = सम

☞ एक सम व एम विषम संख्यांची बेरीज व वजाबाकी नेहमी विषम संख्या येते.

सम + विषम = विषम   विषम + सम = विषम

☞ क्रमवार कोणत्याही 10 नैसर्गिक संख्यात 5 सम व 5 विषम संख्यांच्या बेरजेतील फरक नेहमी 5 येतो.

उदा. 1 ते 10 संख्यांत

5 सम संख्यांची बेरीज = 2+4+6+8+10 = 30

5 विषम संख्यांची बेरीज = 1+3+5+7+9 = 25

$\therefore$ फरक = 05

Note - 10 संख्यापैकी शेवटची 10 वी संख्या जी असते (सम/विषम) त्यांची बेरीज 5 ने जास्त येते.

उदा. वरील उदाहरणात 10 वी संख्या सम आहे

$\therefore$ सम बेरीज 5 ने जास्त

सोडवलेली उदाहरणे

Type - 7

1) 31 ते 70 दरम्यानच्या सर्व विषम संख्यांची बेरीज सर्व सम संख्यांच्या कितीने कमी / जास्त येईल ? (Asst. Pre 2011)

$\Rightarrow$ वरील नियमावरून फरक

30 ते 40 = 5

41 ते 50 = 5

51 ते 60 = 5

61 ते 70 = 5

$\therefore$ फरक = 20

या ठिकाणी प्रत्येक 10 संख्यांत शेवट सम संख्या आहे.

$\therefore$ विषम बेरीज 20 ने कमी येईल.

Type - 8

2) 2+4+6+8+10+ .... + 40 = किती ?

Method - I

$$\text{सुत्र} = \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

$$= \frac{40}{2}\left(\frac{40}{2}+1\right)$$

$$= 20 \times 21$$

$$= 420$$

Method - II

$$\text{सुत्र} = \frac{(\text{प. संख्या} + \text{शे.संख्या})}{2} \times \text{ए. संख्या}$$

$$= \left(\frac{2+40}{2}\right) \times 20$$

$$= \frac{42}{2} \times 20$$

$$= 21 \times 20 = 420$$

Note - $\text{एकूण सम संख्या} = \frac{\text{शेवटची संख्या}}{2} = \frac{40}{2} = 20$

Type - 9

3) 22+24+26+28+ .... + 40 = किती ?

Method - I

$$\Rightarrow \left[\begin{matrix}22 \text{ ते } 40\\ \text{सम बेरीज}\end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix}2 \text{ ते } 40\\ \text{सम बेरीज}\end{matrix}\right] - \left[\begin{matrix}2 \text{ ते } 20\\ \text{सम बेरीज}\end{matrix}\right]$$

$$= \frac{40}{2}\left(\frac{40}{2}+1\right) - \frac{20}{2}\left(\frac{20}{2}+1\right)$$

$$= (20 \times 21) - (10 \times 11) = 420 - 110 = 310$$

Method - II

सुत्र $= \dfrac{(\text{प. संख्या} + \text{शे.संख्या})}{2} \times \text{ए. संख्या} \quad = \left(\dfrac{22+40}{2}\right) \times 10$

$= \dfrac{62}{2} \times 10 = 310$

Note - एकूण संख्या मोजून लिहा.

$= \dfrac{40}{2} - \dfrac{20}{2}$

= 20-10 = 10 संख्या

Type - 9

4) 1+3+5+7+ .... +49 = किती ?

Method - I

सुत्र $= \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2$

$= \left(\dfrac{49+1}{2}\right)^2$

$= 25^2$

= 625

Method - II

सुत्र $= \dfrac{(\text{प. संख्या} + \text{शे.संख्या})}{2} \times \text{ए. संख्या}$

$= \left(\dfrac{1+49}{2}\right) \times 25$

$= \dfrac{50}{2} \times 25$

$= 25 \times 25$

= 625

दिलेल्या क्रमांकाची सम / विषम संख्या शोधणे

i) जेव्हा संख्यांचा प्रकार सारख असतो.

म्हणजेच, सम संख्या देऊन ↔ सम संख्या विचारल्यास

विषम संख्या देऊन ↔ विषम संख्या विचारल्यास

सुत्र - **विचारलेली संख्या = दिलेली संख्या + (2 × क्रमांक)**

उदा. 1) 246 च्या पुढील 54 वी सम संख्या $= 246+(2\times 54)$

$= 246+108$

$= 354$

2) 519 च्या पुढील 38 वी विषम संख्या $= 519 + (2\times 38)$

$= 519+76$

$= 595$

ii) जेव्हा संख्यांचा प्रकार भिन्न असल्यास -

म्हणजेच सम संख्या देऊन ↔ विषम संख्या विचारल्यास

विषम संख्या देऊन ↔ सम संख्या विचारल्यास

विचारलेली संख्या = दिलेली संख्या + (2 × क्रमांक - 1)

उदा. 1) 720 च्या पुढील 42 वी विषम संख्या $= 720+(2\times 42-1)$

$= 720+83$

$= 803$

2) 355 च्या पुढील 25 वी सम संख्या $= 355+(2\times 25-1)$

$= 355+49$

$= 404$

Note - मागील क्रमांकाची संख्या शोधण्यासाठी वरील सुत्रात वजाबाकी करावी.

स्वाध्याय - 1.2

1) 1 ते 40 पर्यंतच्या सर्व सम संख्यांची बेरीज किती ?
1) 820 2) 410 3) 420 4) 840

2) 32 ते 78 पर्यंतच्या सर्व सम संख्यांची बेरीज किती ?
1) 1320 2) 1264 3) 1640 4) 1266

3) 1+3+5+7+9+11+ .... +99 = किती ?
1) 4950 2) 2500 3) 4851 4) 2820

4) 33+35+37+39+77 = किती ?
1) 1045 2) 3003 3) 5005 4) 1265

5) 57 ते 93 पर्यंत एकूण किती सम व विषम संख्या आहेत ?

सम संख्या $= \dfrac{92}{10} - \dfrac{56}{2}$ विषम संख्या $= \dfrac{93+1}{2} - \dfrac{31+1}{2}$

= 46-28 $= \dfrac{36}{2} + 1$

= 18 = 19

6) 48 च्या पुढील व मागील 13 वी सम संख्या कोणत्या ?
1) 36, 24 2) 34, 22 3) 22, 34 4) 24, 36

7) 53 च्या नंतर येणारी 13 वी विषम संख्या कोणती ?
1) 66 2) 89 3) 29 4) 79

8) 178 च्या पुढील 12 वी विषम संख्या कोणती ?
1) 201 2) 203 3) 199 4) 197

9) 2x ही 15 ने भाग जाणारी सम संख्या आहे तर 15 ने भाग जाणारी त्यापुढील 2 री सम संख्या कोणती ?
1) 3x+30 2) 2x+60 3) 2x+30 4) 2x+15

10) (3x-35) ही एक विषम संख्या आहे तर त्यापुढील 10 वी विषम संख्या कोणती ?
1) 3x-55 2) 3x-45 3) 3x-25 4) 3x-15

11) 21 ते 50 पर्यंतच्या सर्व सम संख्यांची बेरीज सर्व विषम संख्यांच्या बेरजेपेक्षा कितीने जास्त / कमी येईल ?
1) 20 ने जास्त 2) 20 ने कमी
3) 15 ने जास्त 4) 15 ने कमी

12) 1 ते 45 पर्यंतच्या संख्यात सर्व विषम संख्यांची बेरीज सर्व सम संख्यांच्या बेरीजेपेक्षा कितीने जास्त येईल ?
1) 22 ने जास्त 2) 22 ने कमी
3) 23 ने कमी 4) 23 ने जास्त

उत्तरे (स्वाध्याय 1.2)

1	3	**4**	4	**7**	4	**10**	4
2	1	**5**	-	**8**	1	**11**	3
3	2	**6**	2	**9**	2	**12**	4

मूळ संख्या व संयुक्त संख्या

12 चे विभाजक - 1, 2, 3, 4, 6, 12

12 चे विभाज्य - 12, 24, 36, 48, 60, ...

संख्या	संख्येचे विभाजक	प्रकार
1	1	-
2	1, 2	मूळ
3	1, 3	मूळ
4	1, 2, 4	संयुक्त
5	1, 5	मूळ
6	1, 2, 3, 6	संयुक्त
7	1, 7	मूळ
8	1, 2, 4, 8	संयुक्त
9	1, 3, 9	संयुक्त

6) मूळ संख्या (Prime Numbers) **:-**

"ज्या संख्येचे 1 व तीच संख्या एवढे दोनच विभाजक असतात, त्या संख्यांना मूळ संख्या म्हणतात."

"ज्या संख्यांना फक्त दोनच विभाजक असतात त्यांना मूळ संख्या म्हणतात."

उदा. 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...

7) संयुक्त संख्या (Composite Numbers) **:-**

"ज्या संख्यांचे 2 पेक्षा अधिक विभाजक असतात, म्हणजेच ज्या संख्यांना 2 पेक्षा जास्त संख्यांनी भाग जातो त्यांना संयुक्त संख्या म्हणतात."

उदा. 4, 6, 8, 9 या मूळ संख्या आहेत.

गुणधर्म :-

- 1 ही संख्या मूळही नाही व संयुक्तही नाही.
- 2 ही एकच सम असणारी संख्या मूळ आहे. म्हणून तिला सममूळ संख्या म्हणतात.
- 1 ते 100 पर्यंत एकूण 25 मूळ तर 74 संयुक्त संख्या आहेत.
- 1 ते 100 पर्यंतच्या 25 मूळ संख्या -
  2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97
- 101 ते 200 पर्यंत एकूण 21 मूळ संख्या आहेत व 79 संयुक्त संख्या आहेत.
- 1 ते 100 पर्यंत लगतच्या दोन मूळ संख्यांत 4 चा व 6 चा फरक असणाऱ्या प्रत्येकी 7 संख्या आहेत.
- 4 चा फरक असणाऱ्या संख्या -
  7-11, 11-17, 19-23, 37-41, 43-47, 67-71, 79-83
- 6 चा फरक असणाऱ्या संख्या -
  23-29, 31-37, 47-53, 53-59, 61-67, 73-79, 83-89
- अंकांची आदलाबदल करून मिळणाऱ्या मूळ संख्या - 9
  11, 13 - 31, 17-71, 37-73, 79-97
- 1 ते 25 पर्यंतच्या मूळ संख्यांची बेरीज - 100
  2+3+5+7+11+13+17+19+23 = 100
- 1 ते 100 पर्यंतच्या मूळ संख्यांची बेरीज - 1060

Type - 10

संख्या मूळ आहे की संयुक्त आहे हे ओळखणे

- दिलेल्या संख्येच्या अंदाजे वर्गमूळापेक्षा लहान मूळ संख्येपैकी एका जरी संख्येने
  - i) भाग गेल्यास - संयुक्त संख्या
  ii) भाग नाही गेल्यास - संयुक्त संख्या

उदा. 1) 323 ही मूळ की संयुक्त संख्या हे ठरविण्यासाठी 323 च्या जवळचा वर्ग 324 आहे व 324 चे वर्गमूळ 18 आहे.

$\therefore$ 323 चे 18 हे अंदाजे (~) वर्गमूळ घेतले.

$\therefore$ 323 ला 18 पेक्षा लहान मूळ संख्येने भाग देऊन पहावा.

$\sqrt{323} \sim 18$

$\therefore$ 323 ला 18 च्या अगोदरच्या मूळ संख्येने भाग जात नाही, म्हणून 323 ही मूळ संख्या आहे.

2) 637

अंदाजे $\sqrt{637} = 25$

25 पेक्षा लहान $\overset{\times}{2}, \overset{\times}{3}, \overset{\times}{5}, \overset{\checkmark}{7}$, 11, 13, 17, 19, 23

7 ने भाग जातो.

$\therefore$ 637 = संयुक्त संख्या

3) 953 - मूळ संख्या 4) 957 - संयुक्त संख्या

5) 527 - संयुक्त संख्या

8) जोडमूळ संख्या (Twin Prime Numbers) **:-**

"दोनचा फरक असणाऱ्या मूळ संख्यांना जोडमूळ संख्या म्हणतात."

- 1 ते 100 पर्यंत एकूण 8 जोडमूळ संख्यांच्या जोड्या आहेत.
  1) 3-5 2) 5-7 3) 11-13 4)17-19
  5) 29-31 6) 41-43 7) 59-61 8) 71-73

9) सहमूळ संख्या (Co-prime Numbers)/ **सापेक्ष मूळ संख्या :-**

"ज्या दोन संख्यांच्या विभाजकामध्ये फक्त 1 हा एकच सामायिक विभाजक असतो त्या संख्यांना सहमूळ संख्या म्हणतात."

उदा. **1)** 4, 9 **2)** 9, 12

4 चे विभाजक =**1**, 2, 4 9 चे विभाजक - **1**, **3**, 9

9 चे विभाजक = **1**, 3, 9 12 चे विभाजक - **1**, 2, **3**, 4, 6, 12

सामाईक विभाजक - 1 सामाईक विभाजक - 1, 3

$\therefore$ 4 व 9 सहमूळ आहेत. $\therefore$ 9 व 12 सहमूळ संख्या नाहीत.

गुणधर्म :-

- कोणत्याही क्रमवार दोन नैसर्गिक संख्या या सहमूळ संख्या असतात.

उदा. 1-2, 2-3, 3-4, 10-11

- कोणत्याही दोन मूळ संख्या सहमूळ असतात.

उदा. 2-3, 5-7, 11-13, 13-17

- जर दिलेल्या दोन संख्या सहमूळ संख्या असतील तर त्यांचा-
  मसावि = 1
  लसावि = त्या दोन संख्यांचा गुणाकार असतो.

उदा. 4, 5 सहमूळ आहेत.

मसावि - 1

लसावि - $4 \times 5 = 20$

✍ जर एकाच संख्येला दोन्ही सहमूळ संख्यांनी भाग जात असेल तर त्या संख्येला त्यांच्या गुणाकारानेही भाग जातो.

उदा. 40 ला 4 व 5 ने भाग जातो.

$\therefore$ 40 ला $4 \times 5 = 20$ ने सुद्धा भाग जातो.

10) परिमेय संख्या (Rational Numbers) **:-**

परिमेय संख्या खालील तीन प्रकारच्या असतात.

I) जर p हा कोणताही पूर्णांक आणि q हा कोणताही शून्योत्तर पुर्णांक ($q \neq 0$) असेल तर $\frac{p}{q}$ या अंशछेद रूपातील संख्येला परिमेय संख्या म्हणतात.

उदा. $\frac{2}{5}, \frac{-7}{11}, \frac{-5}{-7}$, 5, -2, 0, 1

i) धन परिमेय संख्या - अंश व छेद यांची चिन्हे समान असतात.

उदा. $\frac{5}{7}, \frac{-5}{-7}, \frac{+5}{+7}$

ii) ऋण परिमेय संख्या - अंश व छेद यांची चिन्हे समान नसतात.

उदा. $\frac{+5}{-7}, \frac{-5}{+7}, -\frac{5}{7}$

II) ज्या संख्यांची दशांश रूपातील मांडणी अखंड आणि आवृत्ती असते, त्या संख्या परिमेय संख्या असतात.

उदा. 1) $\frac{5}{3} = 1.6666.......\quad = 1.\bar{6} / 1.\dot{6}$ (अखंड व आवर्ती)

2) $\frac{6}{11} = 0.5454........ = 0.\overline{54}$

✍ ज्या संख्यांची दशांश रूपातील मांडणी खंडीत असते, त्या संख्यांना अखंडीत मांडणीमध्ये करता येते.

उदा. $\frac{17}{4} = 4.25 / 4.25\bar{0}$

III) ज्या संख्यांची वर्गमूळे, घनमूळे, ... n वी मूळे ही नैसर्गिक संख्या येतात त्या संख्यासुद्धा परिमेय संख्या असतात.

उदा. $\sqrt{4}, \sqrt{25}, \sqrt[3]{8}, \sqrt[3]{64}$

11) अपरिमेय संख्या (Irrational Numbers)**:-**

परिमेय संख्यांच्या विरूद्ध संख्या म्हणजेच -

I) ज्या संख्यांची दशांश रूपातील मांडणी अखंड परंतु अनावर्ती असते त्या संख्यासुद्धा अपरिमेय असतात.

उदा. 1) 1.0100100010000100001 ....

2) 2.121231234............

II) ज्या संख्यांची वर्गमूळे, घनमूळे किंवा n वी मूळे नैसर्गिक संख्या येत नाहीत, त्या संख्यासुद्धा अपरिमेय असतात.

उदा. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}$

III) वर्गमूळाचा परिघ व व्यास यांचे गुणोत्तर म्हणजेच π ही संख्या परिमेय आहे.

परंतु $\frac{22}{7}$ व 3.14 या परिमेय आहेत.

12) वास्तव संख्या (Real Numbers) **:-**

"सर्व परिमेय संख्या आणि अपरिमेय संख्या यांना मिळून होणाऱ्या संख्यांच्या समूहाला वास्तव संख्या म्हणतात."

वास्तव संख्या = परिमेय संख्या + अपरिमेय संख्या

उदा. $\frac{2}{5}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{9}, \sqrt{11}, 0.\overline{23}$

$$N \subseteq W \subseteq I \subseteq R$$

Note - येथे $\subseteq$ उपसंच आहे. R हा सर्वात मोठा संच आहे.

संख्या	**परिमेय**	**अपरिमेय**	**वास्तव**
$\sqrt{4}$	√	×	√
$\sqrt{3}$	×	√	√
$\frac{22}{7}$	√	×	√
π	×	√	√

13) काल्पनिक / अवास्तव संख्या (Imaginery numbers) :-

"ज्या संख्येचा वर्ग ऋण असतो त्या संख्यांना अवास्तव संख्या म्हणतात."

✍ या संख्या $a+\sqrt{bi}$ या रूपात असतात म्हणजेच ज्यांच्या किंमती logtable किंवा calculater ने काढता येत नाहीत.

उदा. 1) $\sqrt{-5}$, 2) $3+\sqrt{-7}$, 3) $a+\sqrt{bi}$, 4) $\sqrt{\frac{-3}{4}}$

14) संमिश्र संख्या (Complex Numbers) **:-**

"ज्या संख्या सर्व वास्तव आणि अवास्तव संख्या मिळून बनतात त्यांना संमिश्र संख्या म्हणतात."

उदा. $3+\sqrt{-4}$

स्वाध्याय - 1.3

1) 20 ते 50 पर्यंतच्या सर्व मूळ संख्यांची बेरीज किती ?

1) 278 2) 282 257 4) 204

2) 60 ते 80 पर्यंतच्या सर्व मूळ संख्यांची बेरीज किती ?

1) 351 2) 414 3) 272 4) 378

3) 1 ते 100 मूळ संख्यांची बेरीज किती ?

1) 2120 2) 1060 3) 503 4) 1278

4) 1 ते 100 पर्यंतच्या किती मूळ संख्यांची अदलाबदल केली तरी मूळ संख्याच मिळते ?

1) 7 2) 8 3) 9 4) 10

5) खालील पर्यायापैकी मुळ संख्या ओळखा.
1) 323 2) 143 3) 578 4) 407

6) खालीलपैकी संयुक्त संख्या ओळखा.
1) 953 2) 391 3) 957 4) 193

7) 1 ते 100 पर्यंत 6 चा फरक असणाऱ्या लगतच्या मूळ संख्या किती ?
1) 25 2) 08 3) 07 4) 09

8) सहमूळ संख्येची जोडी ओळखा.
1) 4-8 2) 49-15 3) 9-15 4) 21-15

9) खालीलपैकी जोडमूळसंख्या ओळखा .
1) 1-3 2) 11-13 3) 73-75 4) 95-97

10) m, n+2 आणि n+4 या मूळ संख्या असतील तर n = किती ?
(Asst. Mains - 2012)
1) 2 2) 5 3) 3 4) 6

11) जर l = m = n= r $\neq$ o तर सर्वात मोठी परिमेय संख्या कोणती ?
(Asst. Mains - 2012)
1) $\frac{l}{7}$ 2) $\frac{m}{11}$ 3) $\frac{n}{5}$ 4) $\frac{r}{3}$

12) खालीलपैकी धन परिमेय संख्या ओळखा.
1) $\frac{-5}{-7}$ 2) $-\frac{5}{7}$ 3) $\frac{-5}{+7}$ 4) $\frac{5}{-7}$

13) खालीलपैकी परिमेय संख्या कोणती ?
1) $\sqrt{\frac{27}{9}}$ 2) $\sqrt{\frac{45}{5}}$ 3) $\sqrt{-25}$ 4) $\sqrt{27}$

उत्तरे (स्वाध्याय 1.3)

1	3	**4**	3	**7**	3	**10**	3	**13**	2
2	1	**5**	4	**8**	2	**11**	4		
3	2	**6**	2	**9**	2	**12**	1		

15) त्रिकोणी संख्या (Triangular Numbers) **:-**

"दोन क्रमवार नैसर्गिक संख्यांच्या गुणाकाराच्या निमपटीला त्रिकोणी संख्या म्हणतात."

$$\text{त्रिकोणी संख्या} = \frac{n(n+1)}{2}$$

येथे n = 1, 2, 3, 4, ...

✍ तसेच n ला त्रिकोणी संख्येचा पाया सुद्धा म्हणतात.

उदा. 1) $\frac{1\times2}{2}=1$ 2) $\frac{2\times3}{2}=3$

3) $\frac{3\times4}{2}=6$ 4) $\frac{4\times5}{2}=10$

त्रिकोणी संख्या - 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136, 153, 171, ...

✍ **दोन लगतच्या त्रिकोणी संख्यांची बेरीज वर्गसंख्या असते.**

उदा. 1+3 = 4, 3+6 = 9, 10+15 = 25

✍ **त्रिकोणी संख्या ओळखण्यासाठी -**

"जर दिलेल्या संख्येची दुप्पट जर दोन क्रमवार नैसर्गिक संख्यांचा गुणाकार असेल तर ती संख्या त्रिकोणी संख्या असते."

उदा. 1) 10 = त्रिकोणी आहे.
कारण $10\times2=20=4\times5$ लगतच्या संख्या आहेत.

2) 12 = त्रिकोणी नाही.
कारण $12\times2=24=(8\times3,\ 6\times4,\ 12\times2)$ लगत नाहीत.

✍ **त्रिकोणी संख्येचा पाया -**

दिलेल्या त्रिकोणी संख्यांच्या दुपटीतून ज्या मोठ्यात-मोठ्या नैसर्गिक संख्येचा वर्ग वजा होतो ती संख्या पाया असते.

उदा. 1) 120 चा पाया किती ?
$\Rightarrow$ $120\times2=240$
येथे 240 मधून $15^2 = 225$ वजा होते.
$\therefore$ 120 चा पाया = 15

2) 91 चा पाया
$\Rightarrow$ $91\times2=182$
येथे 182 मधून $13^2=169$ वजा होतो.
$\therefore$ 91 चा पाया = 13

✍ **दिलेल्या क्रमांकाची पुढील/मागील त्रिकोणी संख्या शोधणे -**

नवीन पाया = (दिलेल्या संख्येचा पाया + क्रमांक)

✍ प्रथम दिलेल्या त्रिकोणी संख्येचा पाया शोधावा.

✍ विचारलेल्या त्रिकोणी संख्येचा पाया = दिलेल्या संख्येचा पाया + विचारलेला क्रमांक

✍ आलेला पाया घेऊन त्रिकोणी संख्या शोधावी.

उदा. 1) 36 च्या पुढील 7 वी त्रिकोणी संख्या कोणती ?
$\Rightarrow$ i) 36 चा पाया = $36\times2=72$
72 मधून $8^2=64$ वजा होतो. 36 चा पाया = 8
ii) 36 च्या पुढील 7 व्या त्रिकोणी संख्येचा पाया = 8+7 = 15
iii) 36 च्या पुढील 7 वी त्रिकोणी संख्या = $\frac{15\times16}{2}=120$

2) 36 च्या पुढील 15 वी त्रिकोणी संख्या कोणती ?
$\Rightarrow$ i) 36 चा पाया 8 शोधावा.
ii) 15 वी त्रिकोणी संख्येचा पाया = 8+15 = 23
iii) 15 वी त्रिकोणी संख्या = $\frac{23\times24}{2}=276$

16) चौकोणी संख्या / पुर्णवर्ग संख्या (Perfect Square Numbers)**:-**

"नैसर्गिक संख्यांचे वर्ग करून मिळणाऱ्या संख्यांना पुर्णवर्ग संख्या किंवा चौकोणी संख्या म्हणतात."

$$\text{पुर्ण वर्ग संख्या} = n^2$$

n = 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, ...

✍ पुर्णवर्ग संख्यांच्या एककस्थानी 2, 3, 7, 8 हे अंक येत नाहीत.

✍ जर एखाद्या वर्गसंख्येच्या एककस्थानी 5 असेल तर -

i) त्याच्या दशकस्थानी नेहमी 2 येते

ii) आणि 25 सोडून राहिलेली संख्या दोन क्रमवार नैसर्गिक संख्यांचा गुणाकार असतो.

उदा. 1) 2**25** या वर्ग संख्येत 2) 30**25**

i) दशक स्थानी 2 $5 \times 6 = 30$

ii) 25 सोडून राहिलेला $6 = 2 \times 3$ - लगतच्या संख्या

✍ पूर्णवर्ग संख्येत शुन्य (0) येते व दशांशस्थळे दोनच्या पटीत येतात.

उदा. 1) $20^2 = 400$ 2) $200^2 = 40000$

3) $(0.2)^2 = 0.04$ 4) $(0.02)^2 = 0.0004$

प्रश्न खालीलपैकी पुर्णवर्ग संख्या ओळखा.

1) *295, 60*3, **4*61**, 2*07

2) 40*8, 56*0, ***400**, 2*65

3) 46*2, **65*1**, *295, 25*5

4) 0.004, **0.04**, 0.4, 0.00004

प्रश्न खालीलपैकी पुर्णवर्ग नसलेली संख्या ओळखा. (STI Mains. 2012)

1521, 2209, 5776, 1825

17) घन संख्या (Cube Numbers) :-

"नैसर्गिक संख्यांचे घन करून मिळणाऱ्या संख्यांना घन संख्या म्हणतात."

घन संख्या = n^3

उदा. 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, ...

18) बेरीज व्यस्त संख्या / विरूद्ध संख्या :- (Additive Universe / Opposite Numbers)

"ज्या दोन संख्यांची बेरीज शून्य येते त्यांना परस्परांच्या बेरीजव्यस्त संख्या म्हणतात."

✍ दिलेल्या संख्येचे फक्त विरूद्ध चिन्हे घेऊन बेरीजव्यस्त संख्या मिळते, म्हणून त्यांना विरूद्ध संख्या म्हणतात.

उदा. 1) 7+(-7) = 0 2) $\left(\frac{-2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\right) = 0$

∴ 5 ची विरूद्ध संख्या = (-5) ∴ $\left(\frac{-2}{3}\right)$ ची विरूद्ध संख्या $= \left(\frac{2}{3}\right)$

संख्या	विरूद्ध संख्या
11	- 11
$\frac{2}{3}$	$\frac{-2}{3}$ OR $\frac{2}{-3}$ OR $-\frac{2}{3}$
0	0
7^3	7^{-3}
$\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{5}$ OR $\left(\frac{3}{2}\right)^{-5}$

19) गुणाकार व्यस्त संख्या / व्युत्क्रम संख्या - (Multiplicative Universe / Alternate Numbers)

"ज्या दोन संख्यांचा गुणाकार 1 येतो त्यांना परस्परांच्या गुणाकार व्यस्त संख्या म्हणतात."

✍ कोणत्याही संख्येला त्याच्या गुणाकारव्यस्ताने गुणल्यास गुणाकार एक येतो.

✍ संख्येला त्याच्या गुणाकार व्यस्ताने भागाल्यास त्या संख्येचा घातांक दुप्पट होतो.

✍ दिलेल्या संख्येचे चिन्ह न बदलता फक्त अंशछेदाची आदलाबदल केल्यास गुणाकारव्यस्त संख्या मिळते.

संख्या	गुणाकारव्यस्त
-7	$\frac{-1}{7}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$
2^3	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$ OR 2^{-3}
$\left(\frac{3}{4}\right)^5$	$\frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^5}$ OR $\left(\frac{3}{4}\right)^{-5}$ OR $\left(\frac{4}{3}\right)^5$
0	नाही

Note - घातांकीत सख्येच्या गुणाकारव्यस्त साठी

i) घातांकाचे विरूद्ध चिन्ह घ्या. OR

ii) घातांक तोच ठेऊन अंश-छेद बदला.

ii) वरीलपैकी कोणताही एक बदल करावा.

20) रोमन संख्या :- (Roman Numbers)

ही लेखनपद्धती पद्धत आहे.

रोमन	I	V	X	L	C	D	M
देवनागरी	1	5	10	50	100	500	1000

नियम -

i) I हा फक्त (V व X) यांच्या आगोदर / नंतर येतो.

ii) X हा फक्त (L व C) यांच्या आगोदर / नंतर येतो.

1) VI = 5+1 = 6 2) IV = 5-1 = 6

3) IX = 10-1 = 9 4) LX = 50+10 = 60

5) XL = 50-10 = 40 6) XC = 100-10 = 90

7) CX = 100+10 = 110

iii) कोणतीही लहान संख्या मोठ्या संख्येसमोर जास्तीत-जास्त फक्त 3 वेळा घेतात. VIII = 8

iv) एखादी लहान संख्या मोठ्या संख्येच्या डावीकडे लिहिल्यास (फक्त एकदा) ती किंमत वजा करावी.

v) एखाद्या रोमन संख्येच्या डोक्यावर बार (आडवी रेषा) दिल्यानंतर त्याची 1000 पट करावी.

1) $\overline{V} = 5 \times 1000 = 5000$

2) $\overline{X} = 10 \times 1000 = 10000$

1-I	11-XI	30-XXX	CC-200
2-II	12-XII	40-XL	CCC-300
3-III	13-XIII	49-XLIX	CD-400
4-IV	14-XIV	50-L	499
5-V	15-XV	60-LX	D-500
6-VI	16-XVI	70-LXX	
7-VII	17-XVII	80-LXXX	
8-VIII	18-XVIII	90-XC	
9-IX	19-XIX	99-XCIX	
10-X	20-XX	100-C	

21) द्विमान संख्या :- (BinoryNumbers)

"0 व 1 या दोन अंकाचा वापर करून लिहिल्या जाणाऱ्या संख्यांना द्विमान संख्या म्हणतात."

✍ ज्या संख्यालेखन पद्धतीत 0 व 1 चा दोनच अंकाचा वापर केला जातो त्यास द्विमान संख्यालेखन पद्धती म्हणतात.

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9
1	2	4	8	16	32	64	128	256	1024

दशमान संख्यांचे द्विमान संख्यात लेखन

1) 78_{10} = किती ?

I) विस्तार पद्धती

$78 = 64+8+4+2 \qquad = 2^6+2^3+2^2+2^1$

घातांक $\overset{6}{\mathbf{1}}\ \overset{5}{0}\ \overset{4}{0}\ \overset{3}{\mathbf{1}}\ \overset{2}{\mathbf{1}}\ \overset{1}{\mathbf{1}}\ \overset{0}{0}$

$\therefore 78_{10} = 1001110_2$

II) भागाकर पद्धती

		बाकी ↓
2	78	
2	39	0
2	19	1
2	9	1
2	4	1 ↑
2	2	0
2	1	0
	0	1

$\therefore 78_{10} = 1001110_2$

2) 102_{10} = किती ?

$102_{10} = 64+32+4+2$

$= 2^6+2^5+2^2+2^1$

$= \overset{6}{\mathbf{1}}\ \overset{5}{\mathbf{1}}\ \overset{4}{0}\ \overset{3}{0}\ \overset{2}{\mathbf{1}}\ \overset{1}{\mathbf{1}}\ \overset{0}{0}$

$\therefore 102_{10} = 1100110_2$

II) भागाकर पद्धती

		बाकी ↓
2	102	
2	51	0
2	25	1
2	12	1
2	6	0
2	3	0 ↑
2	1	1
	0	1

$\therefore 102_{10} = 1100110_2$

द्विमान संख्यांचे दशमान संख्यांत लेखन -

उदा. 1) 100100111_2 = किती ?

$= \overset{8}{1}\ \overset{7}{0}\ \overset{6}{0}\ \overset{5}{1}\ \overset{4}{0}\ \overset{3}{0}\ \overset{2}{1}\ \overset{1}{1}\ \overset{0}{1}$

$= 2^8+2^5+2^2+2^1+2^0$

$= 128+32+4+2+1$

$= 295$

$\therefore 100100111_2 = 295_{10}$

2) 10101001_2 = किती ?

$= \overset{7}{1}\ \overset{6}{0}\ \overset{5}{1}\ \overset{4}{0}\ \overset{3}{1}\ \overset{2}{0}\ \overset{1}{0}\ \overset{0}{1}$

$= 2^7+2^5+2^3+2^0$

$= 128+32+8+1$

$= 169$

$\therefore 10101001_2 = 169_{10}$

स्वाध्याय 1.4

1) खालीलपैकी त्रिकोणी संख्या कोणती ?
   1) 15 2) 17 3) 18 4) 25
2) खालीलपैकी त्रिकोणी संख्या कोणती ?
   1) 30 2) 25 3) 28 4) 35
3) 6 पाया असणाऱ्या त्रिकोणी संख्या ओळखा.
   1) 30 2) 15 3) 42 4) 21
4) 15 पाया असणाऱ्या त्रिकोणी संख्या ओळखा.
   1) 240 2) 260 3) 120 4) 130
5) 105 या त्रिकोणी संख्येचा पाया शोधा ?
   1) 10 2) 11 3) 13 4) 14
6) 78 चा पाया किती ?
   1) 8 2) 10 3) 12 4) 16
7) 28 या त्रिकोणी संख्येच्या पुढील 13 वी त्रिकोणी संख्या कोणती ?
   1) 2) 3) 4)

खालीलपैकी पुर्ण वर्ग असलेल्या संख्या ओळखा. (प्र. 8 ते 11)

8) 1) 240 2) 260 3) 120 4) 130
9) (STI Mains - 2012)
   1) 3015 2) 4971 3) 6347 4) 3721
10) 1) 46*52 2) 65*1 3) *295 4) 23*5

11) 1) 40*6 2) 56*0 3) *400 4) 2*65

12) खालीलपैकी पुर्ण वर्ग नसलेली संख्या ओळखा.
1) 1521 2) 2209 3) 5776 4) 1825

13) खालीलपैकी पुर्ण वर्ग नसलेली संख्या ओळखा.
1) 0.04 2) 0.169 3) 0.64 4) 0.0225

14) खालीलपैकी पुर्ण वर्ग नसलेली संख्या ओळखा.
1) 400 2) 6400 3) 100 4) 1000

15) $1\frac{3}{16}$ आणि तिची व्युत्क्रम संख्या यातील फरक किती ?
(PSI Mains - 2012)
1) $\frac{15}{11}$ 2) $\frac{16}{19}$ 3) $\frac{4}{7}$ 4) $\frac{105}{304}$

16) $\frac{D}{M} \times C$ = किती ?
1) C-L 2) LC 3) L-C 4) CD

17) XI+IV × II = ?
1) XXX 2) XIX 3) XVII 4) XV

18) (XXX-IX) ÷ VII = ?
1) IV 2) VI 3) V 4) III

उत्तरे (स्वाध्याय - 1.4)

1		**6**		**11**		**16**	
2		**7**		**12**		**17**	
3		**8**		**13**		**18**	
4		**9**		**14**		**19**	
5		**10**		**15**		**20**	

संख्यावरील इतर महत्वाचे प्रश्न

☞ बेरजेतील व वजाबाकीतील एकक, दशक स्थानचे अंक सांगणे.
☞ गुणाकारातील उत्तराचे एकक स्थान सांगणे
☞ घातांकीत संख्येच्या उत्तराचे एकक स्थान सांगणे.
☞ दिलेले अंक वापरून तयार होणाऱ्या संख्या

Type - 11

1) 4+44+444+ 4444 + ... + 444444444 या 9 संख्यांच्या बेरजेतील दशक स्थानचा अंक कोणता ?
(STI Pre. 2012 / Asst. Pre.- 2014)

Method - 1

444444444
 44444444
.
.
.
\+ 44
4
493827**1**56

Method - 2

1 2 3 4 5 6 7 8 9
444444444
493827**1**56

2) 7,77,777,7777 या क्रमीकेतील पहिल्या 11 पदांची बेरीज केली असता उत्तराचे हजारस्थान कोणते ?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
77777777777
3077

Type - 12

3) 888888-88888-8888-888-88-8 = किती ?

ऋण 5 संख्यांची बेरीज =
1 2 3 4 5
88888
98760

∴ वजाबाकीचे उत्तर = 88888
\- 98760
790128

Type - 13

दिलेल्या संख्यांच्या गुणाकारातील उत्तराचे एककस्थान सांगणे.

1) 3**2** × 33**7** × 54**3** × 297**9** गुणाकारातील उत्तराचे एककस्थान कोणते?
$= 2 \times 7 \times 3 \times 9$
$= 14 \times 27$
$= 4 \times 7$
$= 2\mathbf{8}$
एककस्थान = 8

2) 349 × 56 × 38* × 354 या गुणाकराचे एककस्थान 8 आहे तर * किती ?
(MPSC लिपीक - 2014)
$= 9 \times 6 \times * \times 4 = 8$
$= 36 \times 4 \times * = 8$
$= 24 \times * = 8$
$= 4 \times * = 8$ ∴ * = 2

Type - 14

☞ दिलेल्या घातांकीत संख्यांच्या किंमतीचे एककस्थान ठरविणे -
☞ 0, 1, 5, 6 या संख्याचे कोणत्याही घातांकाच्या एककस्थानी उत्तराचे एककस्थान ठरविताना -

i) कोणत्याही संख्येच्या घातांकाच्या किंमती एककस्थाने घातांक 1, 2, 3, 4 नंतर पुन्हा-पुन्हा तेच येतात.

घातांक → संख्या ↓	1 X^1	2 X^2	3 X^3	4 X^4
1	1	1	1	
2	2	4	8	6
3	3	9	7	1
4	4	6	4	6
7	7	9	3	1
8	8	4	2	6
9	9	1	9	1

उदा.

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9
1	2	4	8	16	32	64	128	256	1024

ii) दिलेल्या घाताकाला 4 ने भाग देऊन येणाऱ्या बाकीएवढा एककस्थानच्या अंकाचा घातांक लिहावा.

iii) त्याच्या किंमतीचे एककस्थान म्हणजे उत्तर होय.

उदा. 1) 2448^{65} च्या किंमतीचे एककस्थान किती ?

$= 2448^{65} \rightarrow 8^{65} \rightarrow 8^{65 \div 4} \rightarrow 8^{\text{बाकी-1}} \rightarrow 8^1 = 8$

$\therefore 2448^{65}$ चे एककस्थान = 8

2) $7^{71} \times 6^{59} \times 3^{65}$ या गुणाकाराचे एककस्थान कोणते ?

$= 7^{71} \times 6^{59} \times 3^{65}$

प्रत्येक संख्येच्या घातांकाला 4 ने भाग दिल्यास येणाऱ्या बाकी एवढे घातांक घ्यावे.

$= 7^{71 \div 4} \times 6^{59 \div 4} \times 3^{65 \div 4}$

$= 7^3 \times 6^1 \times 3^1$

$= 343 \times \mathbf{6} \times \mathbf{3}$

$= \mathbf{18} \times \mathbf{3}$

$= 54$

$= 4$

प्रकार - 5

☞ दिलेल्या अंकापासून होणाऱ्या तेवढ्याच अंकी संख्या व त्यांची बेरीज (प्रत्येक संख्येत एक अंक फक्त एकदाच वापरून)

दिलेले अंक	**तयार होणाऱ्या तेवढ्याच अंकी संख्या**
1 अंक -	1×1 = 1 संख्या
2 अंक -	2×1 = 2 संख्या
3 अंक -	3×2 = 6 संख्या
4 अंक -	4×6 = 24 संख्या
5 अंक -	5×24 = 120 संख्या

उदा. 1) 2, 5 या पासून - 25 व 52 या संख्या तयार होतात.

2) 1, 3, 5 या अंकापासून - तयार होणाऱ्या 3 अंकी संख्या
135, 153, 315, 351, 513, 531

Type - 16

1) 2, 5, 7 या 3 अंकापासून तयार होणाऱ्या सर्व 3 अंकी संख्यांची बेरीज किती ?

6 संख्या तयार होतात -

Method - 1

257
275
527
572
725
752
3008

Method - 2

6 संख्यांची बेरीज = 2+5+7 = 14
= 14 × 2 वेळा
= 28

$\therefore$ श द ए (carries: 2 2)
28 28 28
30 0 8

☞ बेरजेच्या प्रत्येक उभ्या स्तंभात 1 अंक दोन वेळा येतो, म्हणून उभी बेरीज 28 घ्यावी.

2) 5, 8, 9 या तीन अंकापासून तयार होणाऱ्या सर्व तीन अंकी संख्यांची बेरीज किती ?

6 संख्या तयार होतात -

Method - 1

589
598
859
895
958
985
4884

Method - 2

6 संख्यांची बेरीज = 5+8+9 = 22
= 22 × 2 वेळा
= 44

$\therefore$ श द ए (carries: 2 2)
44 44 44
48 8 4

Type - 17

3, 2, 0 या तीन अंकापासून तयार होणाऱ्या सर्व 3 अंकी संख्यांची बेरीज किती ?

यातील एक अंक 0 असल्याने तीन अंकी 4 संख्या होतात.

$\therefore$ 4 संख्यांची बेरीज = **023** × ← 2 अंकी
032 ×
203
230
302
320
1055

Type - 18

प्रश्न. 1, 2, 3, 4 या चार अंक प्रत्येक संख्येत एकदाच वापरून तयार होणाऱ्या सर्व 4 अंकी संख्यांची बेरीज किती ?

प्रत्येक अंक हजारस्थानी घेतल्यामुळे प्रत्येकी 6 संख्या याप्रमाणे एकूण = 4 × 6 = 24 संख्या होतील.

प्रत्येक उभ्या स्तंभात प्रत्येक अंक 6 वेळा येतो.

सर्व अंकाची एकदा बेरीज करून त्यास 6 ने गुणावे

Method-I	**Method-II**			
1+2+3+4 =	1234	2134	3124	4123
= 10 × 6 वेळा	1243	2143	3142	4132
= 60	1324	2314	3214	4213
	1342	2341	3241	4231
ह श(6) द(6) ए	1423	2413	3421	4312
60 60 60 60	1432	2431	3412	4321
66 6 6 0				66,660

Type - 19

1) 0, 2, 3, 4 या 4 अंकापासून तयार होणाऱ्या सर्व 4 अंकी संख्यांची बेरीज किती ?

एक अंक 0 आल्याने एकूण 24 ऐवजी 18 संख्या तयार होतील.

∴ 18 संख्यांची बेरीज = {24 संख्यांची बेरीज} - {6 संख्यांची बेरीज}

3 अंकी 6 संख्यांची बेरीज = 0+2+3+4 = 9 × 2 वेळा

श(1)	द(1)	ए
18	18	18
19	9	8

4 अंकी 24 संख्यांची बेरीज = 0+2+3+4 = 9 × 6 वेळा

ह(5)	श(5)	द(5)	ए
54	54	54	54
59	9	9	4

∴ 59994 - 1998 = 57996

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह - 1

1) 6,66,666,6666, ... या क्रमीकेतील पहिल्या 9 पदांची बेरीज केल्यास सहस्त्र स्थानचा अंक कोणता ? (STI Mains - 2012)
1) 4 2) 0 3) 7 4) 6

2) 3+33+333+3333+ .... + 333333333 या बेरजेतील उत्तराचे दशक स्थान कोणते ? (MPSC लिपीक - 2014)
1) 2 2) 5 3) 6 4) 7

3) 9+99+999+ .... + 99999 999999 च्या बेरजेतील हजार स्थानचा अंक कोणता ? (लातूर पोलिस - 2012)
1) 1 2) 3 3) 9 4) 12

4) 55555-5555-555-55-5 = किती ? (MPSC लिपीक - 2011)
1) 6170 2) 50405 3) 46389 4) 49385

5) 274 × 318 × 57* × 313 या गुणाकाराचे एककस्थान 2 असेल तर * = किती ?
1) 5 2) 7 3) 8 4) 9

6) 2464 × 615 × 131 च्या एककस्थानचा अंक कोणता ?
1) 0 2) 2 3) 3 4) 5

7) जर (459 × 46 × 328* × 474) च्या एककस्थानी 2 हा अंक असेल तर * = किती ?
1) 3 2) 5 3) 7 4) 2

8) 27 ही संख्या 107 वेळा घेऊन गुणाकार केल्यास गुणाकाराचे एकास्थान किती असेल ?
1) 7 2) 9 3) 3 4) 1

9) 1, 3, 4 या तीन अंकापासून तयार होणाऱ्या सर्व तीन अंकी संख्यांची बेरीज किती ? (STI Pre. - 2012)
1) 1776 2) 1886 3) 888 4) 2426

10) 6^{15} या संख्येच्या विस्तारीत रूपातील एककस्थान कोणते ? (PSI Pre. - 2013)
1) 4 2) 6 3) 8 4) 2

11) $264^{102}+264^{103}$ या संख्येच्या किंमतीचे एककस्थान कोणते ? (PSI Pre. - 2013)
1) 4 2) 6 3) 7 4) 1

12) 0, 1, 2, 3, 4 हे अंक प्रत्येक संख्येत एकदाच वापरून तयार होणाऱ्या सर्वात मोठ्या व लहान संख्येतील फरक किती ?(STI Mains - 2012)
1) 23976 2) 32976 3) 39276 4) 29376

13) 1, 2, 3, 4, 5 हे अंक प्रत्येक संख्येत एकदाच वापरून तयार होणाऱ्या 2 अंकी संख्या किती ? (Asst. Mains - 2014)
1) 20 2) 10 3) 9 4) 16

14) दोन नैसर्गिक संख्यांची बेरीज 8 आहे . जर त्यांच्या व्युत्क्रम संख्यांची बेरीज $\frac{8}{15}$ असेल तर त्या दोन संख्या कोणत्या ? (STI Pre.-2012)
1) 2-6 2) 1-7 3) 3-5 4) 4-4

15) तीन क्रमवार सम संख्यांची बेरीज 126 आहे तर सर्वात लहान व सर्वात मोठ्या संख्येतील फरक किती ?
1) 42 2) 02 3) 04 4) 24

16) एका दोन अंकी संख्येतील एकक व दशक स्थानच्या अंकाचा गुणाकार 12 आहे जर त्या संख्येत 36 मिळवले तर त्या संख्या कोणत्या ? (STI - 2012)
1) 62 2) 26 3) 43 4) 34

17) एका संख्येच्या एक नवमांश म्हणून 9 वजा केल्यास उत्तर 9 येते तर ती संख्या कोणती ? (Asst. - 2012)
1) 81 2) 160 3) 162 4) 112

18) दोन क्रमवार संख्यांच्या वर्गातील फरक 27 आहे, तर त्या संख्या कोणत्या?
1) 15-16 2) 14-15 3) 12-13 4) 13-14

19) एका संख्येत त्याच संख्येचा 3/4 भाग मिळवून 4 पट केले असता संख्या 126 मिळते तर ती संख्या कोणती ?
1) 28 2) 15 3) 32 4) 18

20) दोन संख्यांची बेरीज 146 असून त्यातील फरक 18 आहे. तर त्या संख्या कोणत्या ? (STI - 2011)
1) 104 व 42 2) 64 व 82 3) 72 व 74 4) 84 व 66

उत्तरे

1	2	**5**	2	**9**	1	**13**	1	**17**	3
2	3	**6**	1	**10**	2	**14**	3	**18**	4
3	1	**7**	4	**11**	3	**15**	3	**19**	4
4	4	**8**	3	**12**	2	**16**	2	**20**	2